ROSTISLAV KOŠŤÁL

TVOŘENÍ TROJZVUKŮ A PŘIROZENÝCH STUPNIC

Souvislost hudby s fysikou byla zjištěna již v dobách Pythagorových, t. j. v 6. stol. př. n. l. Absolutní výška tónu se vyjadřuje kmitočtem, t. j. počtem kmitů za sekundu.[1] Hudba nepoužívá však všech tónů, které bychom dostali při spojité změně kmitočtů, nýbrž vybírá si jen některé tóny podle určitého pořádajícího principu. Tím se tvoří výsek z tónového spektra. Pořádající výběrový princip byl jednak distanční — tóny se tvořily postupně po stejných vzdálenostech (na př. postupně po kvintách), jednak relační, při němž byly tóny tvořeny tak, aby vznikly vzhledem k základnímu tónu předem stanovené vzdálenosti (oktávy, kvinty a tercie). V prvém případě jde o soustavu kanonickou neboli pythagorejskou, v druhém o soustavu harmonickou neboli aristoxenovskou. Mezi takto vzniklými tóny jsou především ty tóny, jež sluchem poznáváme jako tóny příbuzné a jež se označují jako tóny konsonantní. Těmito konsonantními tóny zabýval se již v 6. stol. př. n. l. Pythagoras a v 3. stol. př. n. l. Eukleides, který ukázal, že konsonantní jsou takové tóny, které se mohou mísiti v celek. Naproti tomu disonance je neschopnost k směšování. Tento názor říká vlastně též i C. Stumpf.[2] Theorií konsonance zabýval se též Helmholtz.[3]

V tomto pojednání chci vyložit vznik přirozených stupnic na základě konsonantních tónů. Konsonantní tóny — přesněji formulováno — jsou tóny, u nichž na malý počet kmitů jednoho tónu připadá jiný, ale rovněž malý počet kmitů druhého tónu. Jejich výsledný kmit má periodu rovnou malému celistvému násobku periody jednoho tónu.

Všimneme si konsonantních tónů v oktávě. Jsou to tóny, jejichž poměr absolutních výšek je menší než 2 a je dán poměrem malých celých čísel. Jsou to následující poměry k vyjádřené nesoudělnými čísly a splňující vztah $1 < k < 2$, které při sestavení sestupně podle konsonance, t. j. tak, že spol. násobek čitatele a jmenovatele neklesá, tvoří řadu:

$$\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{7}{6}, \frac{9}{5}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{11}{6}, \frac{10}{7}, \frac{9}{8},$$

$$\frac{11}{7}, \frac{12}{7}, \frac{11}{8}, \frac{10}{9}, \frac{13}{7}, \frac{11}{9}, \frac{13}{8}, \frac{11}{10}, \frac{13}{9}, \frac{15}{8}, \frac{14}{9}, \frac{13}{10}, \frac{12}{11}, \ldots$$

Od poměru $\frac{9}{5}$ nejsou již tóny konsonantní. Aby počet tónů v oktávě nebyl příliš velký, užívá se jen tónů, jichž poměr je dán součinem mocnin prvočísel 2, 3 a 5 o celém exponentu. Nevyskytují se tedy v relativních výškách čísla, jež jsou násobkem prvočísel 7, 11, 13, 17, 19 . . ., tedy prvočísel vyšších než 5. Pak pořadí tónů podle libozvučnosti je toto:

$$\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{5},\ \frac{9}{8},\ \frac{10}{9},\ \frac{15}{8},\ \frac{16}{9},\ \frac{16}{15},\ \frac{25}{16},$$

$$\frac{27}{16},\ \frac{25}{18},\ \frac{27}{20},\ \frac{25}{24},\ \frac{27}{25},\ \frac{32}{25},\ \ldots \tag{1}$$

Prvých šest poměrů dává dvojzvuky libozvučné. Poměry těchto dvojzvuků můžeme psát i takto:

$$1 : \frac{3}{2},\quad 1 : \frac{4}{3},\quad 1 : \frac{5}{3},\quad 1 : \frac{5}{4},\quad 1 : \frac{6}{5},\quad 1 : \frac{8}{5}.$$

Nyní hledejme konsonantní trojzvuky, vytvořené z řady nalezených konsonantních dvojzvuků seřazených sestupně podle konsonance

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{8}{5}. \tag{2}$$

Trojzvukem zde obecně rozumím tři tóny vybrané z této řady. Trojzvuk bude konsonantní, jestliže mezi jednotlivými dvěma tóny trojzvuku nevznikne žádný dvojzvuk, který by nebyl konsonantní, tedy vznikne vždy některý ze šesti uvedených dvojzvuků. Proto si vždy všimnu intervalů mezi jednotlivými tóny, a to postupně mezi tóny 1—2, 2—3, 1—3.

Všimněme si nejdříve tří prvých tónů o relativních výškách $1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$, tedy sestavených podle absolutní výšky v řadu

$$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2}$$

a tedy o intervalech

$$\frac{4}{3},\ \frac{9}{8},\ \frac{3}{2}.$$

Tento trojzvuk není tedy konsonantní (je tam interval $\frac{9}{8}$).

Vezměme nyní další tón o relativní výšce $\frac{5}{3}$ z řady konsonantních dvojzvuků a sestavme tóny opět podle výšky v řadu

$$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3}.$$

Kromě uvedeného trojzvuku mohou nyní vzniknouti ještě tyto další trojzvuky

	$1\ \ \frac{4}{3}\ \ \frac{5}{3}$	$1\ \ \frac{3}{2}\ \ \frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}\ \ \frac{3}{2}\ \ \frac{5}{3}$
s intervaly	$\frac{4}{3}\ \ \frac{5}{4}\ \ \frac{5}{3}$.	$\frac{3}{2}\ \ \frac{10}{9}\ \ \frac{5}{3}$	$\frac{9}{8}\ \ \frac{10}{9}\ \ \frac{5}{4}$

Z těchto tří trojzvuků je tedy konsonantní trojzvuk s relativními výškami $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$; to jest tedy nejlepší konsonantní trojzvuk. Poměr výšek tónů je tedy 3 : 4 : 5.

Vezměme nyní další tón z řady konsonantních dvojzvuků o relativní výšce $\frac{5}{4}$. Seřazením dostaneme pořadí

$$1,\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3}.$$

Přibráním tohoto tónu může vzniknout dalších šest trojzvuků:

$$\text{s intervaly}\qquad \begin{array}{ccc} 1 & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} \\[4pt] \frac{5}{4} & \frac{16}{15} & \frac{4}{3} \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\[4pt] \frac{5}{4} & \frac{6}{5} & \frac{3}{2} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & \frac{5}{4} & \frac{5}{3} \\[4pt] \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{array}}$$

$$\text{s intervaly}\qquad \begin{array}{ccc} \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\[4pt] \frac{16}{15} & \frac{9}{8} & \frac{6}{5} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\[4pt] \frac{16}{15} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\[4pt] \frac{6}{5} & \frac{10}{9} & \frac{4}{3} \end{array}$$

Jsou tedy dalšími konsonantními trojzvuky $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ a $1, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}$. Protože trojzvuk $1, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}$ sestává z konsonantnějších dvojzvuků než trojzvuk $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ (z těchže jako prvý konsonantní dvojzvuk), máme druhým konsonantním trojzvukem $1, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}$ a třetím konsonantním trojzvukem $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$. Je tedy poměr výšek tónů u druhého konsonantního trojzvuku $12 : 15 : 20$ a u třetího $4 : 5 : 6$.

Vezměme nyní další tón z řady konsonantních dvojzvuků : $\frac{6}{5}$. Seřazením dostaneme

$$1, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}.$$

Přibráním tohoto tónu vznikne dalších 10 trojzvuků s intervaly:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{5}{4} \\[4pt] \frac{6}{5} & \frac{25}{24} & \frac{5}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{4}{3} \\[4pt] \frac{6}{5} & \frac{10}{9} & \frac{4}{3} \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{2} \\[4pt] \frac{6}{5} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \end{array}} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{5}{3} \\[4pt] \frac{6}{5} & \frac{25}{18} & \frac{5}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \frac{6}{5} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} \\[4pt] \frac{25}{24} & \frac{16}{15} & \frac{10}{9} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{6}{5} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\[4pt] \frac{25}{24} & \frac{6}{5} & \frac{5}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \frac{6}{5} & \frac{5}{4} & \frac{5}{3} \\[4pt] \frac{25}{24} & \frac{4}{3} & \frac{25}{18} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \frac{6}{5} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\[4pt] \frac{10}{9} & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \frac{6}{5} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\[4pt] \frac{10}{9} & \frac{5}{4} & \frac{25}{18} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \frac{6}{5} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\[4pt] \frac{5}{4} & \frac{10}{9} & \frac{25}{18} \end{array}$$

Je tedy čtvrtým konsonantním trojzvukem $1, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}$ se stejnými dvojzvuky jako u třetího konsonantního trojzvuku. Poměr výšek tónů v tomto trojzvuku je tedy $10 : 12 : 15$.

Přibráním posledního tónu z řady konsonantních dvojzvuků a seřazením dostáváme pořadí relativních výšek

$$1, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}.$$

Tím dostaneme dalších 15 trojzvuků:

$1 \quad \frac{6}{5} \quad \frac{8}{5}$	$1 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{8}{5}$	$1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{8}{5}$	$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5}$	$1 \quad \frac{8}{5} \quad \frac{5}{3}$
$\frac{6}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{8}{5}$	$\frac{5}{4} \quad \frac{32}{25} \quad \frac{8}{5}$	$\frac{4}{3} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{8}{5}$	$\frac{3}{2} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{8}{5}$	$\frac{8}{5} \quad \frac{25}{24} \quad \frac{5}{3}$
$\frac{6}{5} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{8}{5}$	$\frac{6}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{8}{5}$	$\frac{6}{5} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5}$	$\frac{6}{5} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{5}{3}$	$\frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{8}{5}$
$\frac{25}{24} \quad \frac{32}{25} \quad \frac{4}{3}$	$\frac{10}{9} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{4}{3}$	$\frac{5}{4} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} \quad \frac{25}{24} \quad \frac{25}{18}$	$\frac{16}{15} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{32}{25}$
$\frac{5}{4} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5}$	$\frac{5}{4} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{5}{3}$	$\frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5}$	$\frac{4}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{5}{3}$	$\frac{3}{2} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{5}{3}$
$\frac{6}{5} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{32}{25}$	$\frac{32}{25} \quad \frac{25}{24} \quad \frac{4}{3}$	$\frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{6}{5}$	$\frac{6}{5} \quad \frac{25}{24} \quad \frac{5}{4}$	$\frac{16}{15} \quad \frac{25}{24} \quad \frac{10}{9}$

Jsou tedy další konsonantní trojzvuky $1, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}$ a $1, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}$. Oba tyto trojzvuky sestávají ze stejných dvojzvuků. Poněvadž u trojzvuku $1 : \frac{6}{5} : \frac{8}{5}$ jsou výšky tónů v poměru $5 : 6 : 8$ a u trojzvuku $1 : \frac{4}{3} : \frac{8}{5}$ v poměru $15 : 20 : 24$, pišme jako pátý konsonantní trojzvuk $1 : \frac{6}{5} : \frac{8}{5}$ a jako šestý konsonantní trojzvuk $1 : \frac{4}{3} : \frac{8}{5}$. Víc konsonantních trojzvuků nemůžeme již dostati.

K těmto konsonantním trojzvukům dospějeme též tak, že z řady přirozených čísel vynecháme prvočísla větší než 5 a všechny jejich násobky, takže dostaneme řadu

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, \ldots\ldots$$

Z této řady vytvoříme poměry tří čísel podle velikosti, a to tak, aby poměr kterýchkoliv dvou byl menší než 2. Z těchto poměrů vynecháme všechny, mezi nimiž je disonantní dvojzvuk $\frac{9}{5}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{15}{8}, \ldots$

Pak dospějeme postupně k těmto poměrům:

$$\begin{aligned} 3 : 4 : 5 \quad &, \quad n = 60, \\ 4 : 5 : 6 \quad &, \quad n = 60, \\ 5 : 6 : 8 \quad &, \quad n = 120, \\ 10 : 12 : 15 \quad &, \quad n = 60, \\ 12 : 15 : 20 \quad &, \quad n = 60, \\ 15 : 20 : 24 \quad &, \quad n = 120, \end{aligned}$$

kde n je nejmenší společný násobek členů jednotlivých poměrů. Je to nejnižší vrchní harmonický tón společný jednotlivým tónům trojzvuku. Případy, u nichž je $n = 60$, vyšly dřívější úvahou jako prvé čtyři konsonantní trojzvuky, případy pro $n = 120$ vyšly jako poslední dva konsonantní trojzvuky.

Vždy u dvou trojzvuků se vyskytly tytéž dvojzvuky (až na pořadí). Bylo to u trojzvuků

$$3:4:5 \quad \text{a} \quad 12:15:20,$$
$$4:5:6 \quad \text{a} \quad 10:12:15,$$
$$5:6:8 \quad \text{a} \quad 15:20:24.$$

Kdybychom se byli omezili jen na prvočísla 2 a 3, dostali bychom jen konsonantní dvojzvuky $\frac{3}{2}$ a $\frac{4}{3}$; z nich pak by byl jediný trojzvuk

$$1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2}$$

a ten by obsahoval již nekonsonantní dvojzvuk $\frac{9}{8}$.

Z uvedených 7 tónů lze sestavit $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$ čtyřzvuků, z nichž však není žádný konsonantní — vždy se v něm objeví některý disonantní dvojzvuk.

Všimněme si nyní obratu v konsonantním dvojzvuku.

Obratem $\frac{3}{2}$ dostáváme $2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$,

obratem $\frac{4}{3}$ dostáváme $2 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$,

obratem $\frac{5}{3}$ dostáváme $2 : \frac{5}{3} = \frac{6}{5}$,

obratem $\frac{5}{4}$ dostáváme $2 : \frac{5}{4} = \frac{8}{5}$,

obratem $\frac{6}{5}$ dostáváme $2 : \frac{6}{5} = \frac{5}{3}$,

obratem $\frac{8}{5}$ dostáváme $2 : \frac{8}{5} = \frac{5}{4}$.

Vzniká tedy obratem konsonantních dvojzvuků opět konsonantní dvojzvuk.

Všimněme si obratu v jednotlivých konsonantních trojzvucích. Obratem jednotlivých trojzvuků dostáváme

$$\left.\begin{array}{llll}
1. \quad 3:4:5, & 1:\frac{4}{3}:\frac{5}{3}, & 1:\frac{5}{4}:\frac{3}{2}, & 1:\frac{6}{5}:\frac{8}{5}, \\[6pt]
2. \quad 12:15:20, & 1:\frac{5}{4}:\frac{5}{3}, & 1:\frac{4}{3}:\frac{8}{5}, & 1:\frac{6}{5}:\frac{3}{2}, \\[6pt]
3. \quad 4:5:6, & 1:\frac{5}{4}:\frac{3}{2}, & 1:\frac{6}{5}:\frac{8}{5}, & 1:\frac{4}{3}:\frac{5}{3}, \\[6pt]
4. \quad 10:12:15, & 1:\frac{6}{5}:\frac{3}{2}, & 1:\frac{5}{4}:\frac{5}{3}, & 1:\frac{4}{3}:\frac{8}{5}, \\[6pt]
5. \quad 5:6:8, & 1:\frac{6}{5}:\frac{8}{5}, & 1:\frac{4}{3}:\frac{5}{3}, & 1:\frac{5}{4}:\frac{3}{2}, \\[6pt]
6. \quad 15:20:24, & 1:\frac{4}{3}:\frac{8}{5}, & 1:\frac{6}{5}:\frac{3}{2}, & 1:\frac{5}{4}:\frac{5}{3}.
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Obratem trojzvuku 1 dostáváme trojzvuky 3 a 5 a obratem trojzvuku 2 dostáváme trojzvuky 4 a 6. Tvoří tedy jednu skupinu trojzvuků trojzvuky 1, 3 a 5 o výškách postupně v poměru

$$3:4:5,\quad 4:5:6,\quad 5:6:8$$

a druhou skupinu trojzvuky 2, 4 a 6 o výškách postupně v poměru

$$12:15:20,\quad 10:12:15,\quad 15:20:24.$$

Lze sestaviti ještě trojzvuky další, ale s nelibozvučnými dvojzvuky, na př.

$$\begin{array}{llll} 5:6:9, & 6:9:10, & 9:10:12 & \text{nebo} \\ 5:8:9, & 8:9:10, & 9:10:16 & \text{nebo} \\ 6:8:9, & 8:9:12, & 9:12:16 & \text{nebo} \\ 6:9:10, & 9:10:12, & 10:12:18 & \text{atd.} \end{array}$$

Tyto trojzvuky nejsou tedy konsonantní.

Stupnice v soustavě harmonické byly vytvořeny užitím kvint a tercií tím, že se kvintovými kroky odvodila od základního tónu sekunda, kvarta a kvinta a terciovými kroky pak od základního tónu tercie, od kvarty sexta a od kvinty septima. Užívané stupnice i některé staré církevní stupnice lze však vytvořiti se zřetelem ke konsonanci, jak si nyní ukážeme.

Konsonantní dvojzvuk jest především $\frac{3}{2}$ a pak $\frac{4}{3}$, který vzniká obratem $\frac{3}{2}$. Konsonantní stupnici dostaneme, když k jednotlivým tónům konsonantního trojzvuku přidáme tóny o relat. výšce $\frac{3}{2}$ a $\frac{4}{3}$. Jestliže takto vzniklý tón překročí oktávu, sníží se jeho výška o oktávu, aby byl v mezích relativních výšek 1 a 2. Provedeme-li to a tóny seřadíme, dostaneme stupnici vytvořenou k jednotlivým trojzvukům. Tedy pro uvedených šest konsonantních trojzvuků dostaneme šest stupnic.

1. K tónům prvního trojzvuku $\quad 1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{3}$

   přísluší

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \equiv \frac{5}{4} \\[4pt] \frac{4}{3} & \frac{16}{9} & \frac{20}{9} \equiv \frac{10}{9}. \end{array}$$

Seřazením vzniklých tónů vzniká stupnice

$$1 \quad \frac{10}{9} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{16}{9} \quad 2$$

s intervaly

$$\frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8}.$$

2. K tónům druhého trojzvuku příslušÍ

$$\begin{array}{ccc} 1 & \frac{5}{4} & \frac{5}{3} \\[6pt] \frac{3}{2} & \frac{15}{8} & \frac{5}{2} \equiv \frac{5}{4} \\[6pt] \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{20}{9} \equiv \frac{10}{9}. \end{array}$$

Seřazením vzniklých tónů vzniká stupnice

$$1 \quad \frac{10}{9} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{15}{8} \quad 2$$

s intervaly

$$\frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15}.$$

3. K tónům třetího trojzvuku přísluší

$$\begin{array}{ccc} 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\[6pt] \frac{3}{2} & \frac{15}{8} & \frac{9}{4} \equiv \frac{9}{8} \\[6pt] \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2. \end{array}$$

Seřazením vzniklých tónů vzniká stupnice

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{15}{8} \quad 2$$

s intervaly

$$\frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15}.$$

4. K tónům čtvrtého trojzvuku přísluší

$$\begin{array}{ccc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{2} \\[6pt] \frac{3}{2} & \frac{9}{5} & \frac{9}{4} \equiv \frac{9}{8} \\[6pt] \frac{4}{3} & \frac{8}{5} & 2, \end{array}$$

tedy stupnice

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{9}{5} \quad 2$$

s intervaly

$$\frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9}.$$

5. K tónům pátého trojzvuku přísluší

$$\begin{array}{ccc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\[6pt] \frac{3}{2} & \frac{9}{5} & \frac{12}{5} \equiv \frac{6}{5} \\[6pt] \frac{4}{3} & \frac{8}{5} & \frac{32}{15} \equiv \frac{16}{15}, \end{array}$$

tedy stupnice

$$1 \quad \frac{16}{15} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{9}{5} \quad 2$$

s intervaly

$$\frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9}.$$

6. K tónům šestého trojzvuku $\quad 1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{8}{5}$

přísluší

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{2} & 2 & \frac{12}{5} \equiv \frac{6}{5} \\ \frac{4}{3} & \frac{16}{9} & \frac{32}{15} \equiv \frac{16}{15}, \end{array}$$

tedy stupnice

$$1 \quad \frac{16}{15} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{16}{9} \quad 2$$

s intervaly

$$\frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8}.$$

Vyšly tedy stupnice s těmito relativními výškami tónů

$$\begin{array}{lcccccccc}
1. & 1 & \frac{10}{9} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{16}{9} & 2 \\
2. & 1 & \frac{10}{9} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{15}{8} & 2 \\
3. & 1 & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{15}{8} & 2 \\
4. & 1 & \frac{9}{8} & \frac{6}{5} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{8}{5} & \frac{9}{5} & 2 \\
5. & 1 & \frac{16}{15} & \frac{6}{5} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{8}{5} & \frac{9}{5} & 2 \\
6. & 1 & \frac{16}{15} & \frac{6}{5} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{8}{5} & \frac{16}{9} & 2
\end{array}$$

Zavedením hudebních názvů pro pořadí tónů užívaných ve stupnici vidíme: Sekunda může mít výšky $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{16}{15}$; poněvadž $\frac{9}{8} > \frac{10}{9} > \frac{16}{15}$ a poněvadž interval mezi $\frac{9}{8}$ a $\frac{10}{9}$ je velmi malý — $\frac{81}{80}$, kdežto mezi $\frac{10}{9}$ a $\frac{16}{15}$ je větší — $\frac{25}{24}$, označuje se $\frac{9}{8}$ a $\frac{10}{9}$ jako celý tón, a to $\frac{9}{8}$ velký celý tón (1), $\frac{10}{9}$ malý celý tón (1) a $\frac{16}{15}$ velký půltón $(\frac{1}{2})$. Jsou tedy dvě velké sekundy $\frac{9}{8}$ (vyšší) a $\frac{10}{9}$ (nižší) a jedna malá sekunda $\frac{16}{15}$.

Tercie může mít výšky $\frac{5}{4}$ a $\frac{6}{5}$. Poněvadž $\frac{5}{4} > \frac{6}{5}$ $\left(\frac{5}{4} = \frac{6}{5} \cdot \frac{25}{24}\right)$, je $\frac{5}{4}$ velká tercie a $\frac{6}{5}$ malá tercie.

Kvarta je jen jedna $\frac{4}{3}$.

Kvinta je rovněž jen jedna $\frac{3}{2}$.

Sexta může mít výšky $\frac{5}{3}$ a $\frac{8}{5}$. Poněvadž $\frac{5}{3} > \frac{8}{5}$ $\left(\frac{5}{3} = \frac{8}{5} \cdot \frac{25}{24}\right)$, je $\frac{5}{3}$ velká sexta a $\frac{8}{5}$ malá sexta.

Septima může mít výšky $\frac{15}{8}$, $\frac{9}{5}$ a $\frac{16}{9}$. Poněvadž $\frac{15}{8} > \frac{9}{5} > \frac{16}{9}$ a poněvadž interval mezi $\frac{15}{8}$ a $\frac{9}{5}$ je velký $\left(\frac{15}{8} = \frac{9}{5} \cdot \frac{25}{24}\right)$ a interval mezi $\frac{9}{5}$ a $\frac{16}{9}$ jest malý $\left(\frac{9}{5} = \frac{16}{9} \cdot \frac{81}{80}\right)$, máme jednu velkou septimu $\frac{15}{8}$ a dvě malé septimy $\frac{9}{5}$ (vyšší) a $\frac{16}{9}$ (nižší).

Užijeme-li tohoto označení na dvojzvuky (1), vidíme, že podle konsonantnosti jsou seřazeny takto: kvinta, kvarta, velká sexta, velká tercie, malá tercie a malá sexta. Pak následují již nekonsonantní dvojzvuky v tomto pořadí: malá septima (vyšší), velká sekunda (vyšší), velká sekunda (nižší), velká septima, malá septima (nižší), malá sekunda a další.

Užijeme-li nyní tohoto označení na trojzvuky (3) a užijeme-li označení durový, resp. tvrdý na prvou skupinu trojzvuků získaných obratem a označení mollový, resp. měkký na druhou skupinu trojzvuků získaných obratem, dostáváme toto pořadí konsonantních trojzvuků:

1. tvrdý kvart-sextový (kvartsextakord),
2. měkký terc-sextový (sextakord),
3. tvrdý terc-kvintový (kvintakord),
4. měkký terc-kvintový (kvintakord),
5. tvrdý terc-sextový (sextakord),
6. měkký kvart-sextový (kvartsextakord).

Všimněme si nyní intervalů — vyjádřených v celých tónech a půltónech — mezi jednotlivými tóny v odvozených trojzvucích:

1.	$2\frac{1}{2}$,	2	4.	$1\frac{1}{2}$,	2
2.	2,	$2\frac{1}{2}$	5.	$1\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$
3.	2,	$1\frac{1}{2}$	6.	$2\frac{1}{2}$,	$1\frac{1}{2}$

Můžeme tedy říci, že konsonantnější jsou trojzvuky, u nichž
1. intervaly jsou méně rozdílné,
2. intervaly jsou větší,
3. sestupně sestavené intervaly jsou lahodnější než vzestupně seřazené.

Vyjádřeme nyní intervaly ve stupnicích celými tóny a půltóny. Pak dostali jsme toto pořadí stupnic:

$$1.\quad 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1 \qquad\qquad 4.\quad 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1$$

$$2.\quad 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2} \qquad\qquad 5.\quad \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1$$

$$3.\quad 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2} \qquad\qquad 6.\quad \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1$$

U stupnice druhé liší se jen druhý tón od druhého tónu stupnice třetí, a to o

$$\frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{81}{80},$$

tedy o syntonické koma (Didymovo koma). Jsou tedy tyto dvě stupnice skoro stejné.

Stupnice pátá a šestá liší se navzájem jen sedmým tónem a zase o

$$\frac{9}{5} : \frac{16}{9} = \frac{81}{80},$$

tedy opět o syntonické koma; jsou tedy tyto dvě stupnice rovněž skoro stejné.

Vyšly nám tedy užitím prvočísel 2, 3 a 5 a užitím kvint a kvart na jednotlivé tóny trojzvuku pořadím tyto konsonantní stupnice, které označujeme, resp. můžeme označiti jako stupnice přirozené:

1. mixolydická,
2. durová (ionická) se sekundou o koma nižší,
3. durová (ionická),
4. mollová (aeolská),
5. frygická (se septimou o koma vyšší než ve stupnici další),
6. frygická (se septimou o koma nižší než ve stupnici 5).

U stupnice mixolydické bylo pořadí tónů a půltónů

$$1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1,$$

u stupnice durové

$$1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2},$$

u stupnice mollové

$$1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1,$$

u stupnice frygické

$$\frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1.$$

Ve všech uvedených stupnicích jsou vždy mezi půltóny dva nebo tři celé tóny. Theoreticky by mohly vzniknout ještě další stupnice takto vytvořené, a to

$$1\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}$$ — t. j. lydická,

$$1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1$$ — t. j. dorická,

$$\frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\ \ 1$$ — t. j. hypofrygická.

Tyto stupnice však uvedeným způsobem mezi konsonantními nevyšly.

Rovněž nevyšly mezi konsonantními ani další stupnice, které nemají splněnu podmínku, že mezi dvěma půltóny jsou dva nebo tři celé tóny. Je to stupnice mollová harmonická

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 1\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

a mollová melodická

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} .$$

Kdybychom se omezili jen na tóny vytvořené z prvočísel 2 a 3 a vytvořili kvinty a kvarty na disonantní trojzvuk

$$1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} ,$$

tedy

$$\frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{9}{4} \equiv \frac{9}{8} ,$$

$$\frac{4}{3} \quad \frac{16}{9} \quad 2 ,$$

dostali bychom stupnici

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{16}{9} \quad 2$$

o intervalech

$$\frac{9}{8} \quad \frac{32}{27} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{32}{27} \quad \frac{9}{8} ,$$

tedy jen o celém tónu $\frac{9}{8}$ a větším celém tónu $\frac{32}{27}$. Vhodným způsobem tvoření můžeme při omezení na prvočísla 2 a 3 (tedy bez prvočísla 5) dospěti ke stupnicím pythagorejským.

Literatura

1. Miroslav B a r v í k: Přehled hudební akustiky, 1. vyd., Praha 1949.
2. Gustav E n g e l: Über Vergleichung von Tondistanzen (Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, Bd. 2, str. 363—378).
3. H. G e i g e r—Karl S c h e e l: Handbuch der Physik VIII, Berlin 1927.
4. Hermann H e l m h o l t z: Lehre von den Tonempfindungen, Braunschweig 1877, 6. vyd. 1913.
5. Paul H i n d e m i t h: Unterweisung im Tonsatz I, Mainz 1940.
6. Josef H u t t e r: Hudební myšlení, Praha 1943.
7. František N a c h t i k a l: Akustika (Věstník České akademie, r. 18, 1907).
8. František N a c h t i k a l: Technická fysika, Praha 1937.
9. Vladimír N o v á k: Fysika I, Praha 1929.
10. Karl S c h a e f e r: Musikalische Akustik, Berlin 1919.
11. Karl S t u m p f: Konsonanz u. Dissonanz, Beitr. z. Akust. u. Musikwissenschaft, Leipzig 1898.

Poznámky:

[1] Použité pojmy z hudební akustiky jsou formulovány jednak v učebnicích fysiky (na př. uvedených v připojené literatuře pod 8, 9), v knihách o hudební akustice (na př. 1, 5, 6, 10), příp. ve spec. pojednáních a sbornících (2, 3, 4, 7, 11).

[2] Carl Stumpf: Konsonanz u. Dissonanz, Beiträge zur Akustik und Musikwissenschaft, Leipzig 1898.
[3] Hermann Helmholtz: Lehre von den Tonenpfindungen, Braunschweig 1877, 6. vyd., 1913.

Tuto práci, která vznikla na pracovišti fysiky vysokého učení technického v Brně, přednesl její autor na zasedání katedry dějin umění filosofické fakulty v Brně. *Red.*

ОБРАЗОВАНИЕ ТРЕЗВУЧИЙ И НАТУРАЛЬНЫХ ГАММ

В этой статье подаю физическую основу для образования трезвучий и натуральных гамм. Этим способом трезвучья и натуральные гаммы хотя и не возникли, но интересно, что можно дать их образованию следующую теоретическую основу.

В первую очередь я занимаюсь образованием консонантных трезвучий. При этом выхожу из ряда консонантных двузвучий, расположенных в нисходящем порядке по консонансе и выбираю из них всегда по три тона так, чтобы каждые два из них образовали консонантные двузвучья. Таким образом я достиг шести консонантных трезвучий в таком порядке:

1. твердое кварт-секствое (квартсекстаккорд),
2. мягкое терц-секстовое (секстаккорд),
3. твердое терц-квинтовое (квинтаккорд),
4. мягкое терц-квинтовое (квинтаккорд),
5. твердое терц-секстовое (секстаккорд),
6. мягкое кварт-секстовое (квартсекстаккорд).

В дальнейшем занимаюсь образованием гамм а именно таким образом, что в гамму прибавляю, кроме тона трезвучья, еще квинту и кварту каждого тона трезвучья.

Из последовательно составленных консонантных трезвучий возникли натуральные гаммы следующего порядка:

1. миксолидическая,
2. мажорная (с секундой на комму ниже),
3. мажорная,
4. минорная (эольская),
5. фригицкая (с септимой на комму выше чем в следующей гамме),
6. фригицкая (с септимой на комму ниже чем в предыдущей гамме).

Гаммы лидическая, дорическая и ипофригицкая не вышли. Консонантными вышли в этом случае только некоторые из гамм, в которых между полутонами находятся два или три целых тона. Консонантной не получилась ни одна из гамм, неудовлетворяющих приведенному условию: минорная гармоническая и минорная мелодическая.

Перевел: *Р. Коштял*

LA FORMATION DES TRITONS ET DES GAMMES RATIONNELLES

Dans ce travail nous posons les bases physiques quant à la formation des tritons et des gammes rationnelles. Ce n'est pas, bien entendu, de cette manière, que les tritons et les gammes rationnelles on pris leur origine, mais il est intéressant qu'on peut comprendre leur formation sur cette basse théorique.

Nous nous occupons tout d'abord de la formation des tritons consonants. En partant d'une série des bitons consonants rangés d'après leur consonance dans l'ordre descendant, nous choisissons entre eux chaque foi trois tons de façon que chaque paire qu'on en peut former représentait un biton consonant. Ainsi nous avons obtenu six tritons consonants dans l'ordre suivant:

1. Quarte — Sixte — accord majeur,
2. Tierce — Sixte — accord mineur,
3. Tierce — Quinte — accord majeur,
4. Tierce — Quinte — accord mineur,
5. Tierce — Sixte — accord majeur,
6. Quarte — Sixte — accord mineur.

Puis nous nous occupons de la formation des gammes de façon que — outre les tons du triton contenus dans la gamme — la Quinte et la Quarte relatives à ces trois tons y soient également contenues. Alors des tritons consonants successivement constitués nous obtenons les gammes rationnelles suivantes:

1. Mixolydienne,
2. Majeure (Ionienne) avec la seconde diminuée d'un coma,
3. Majeure (Ionienne),
4. Mineure (Eolienne),
5. Phrygienne (avec la Septième augmentée d'un coma par rapport à la gamme suivante),
6. Phrygienne (avec la Septième diminuée d'un coma par rapport à la gamme 5).

On ne parvient pas à la gamme Lydienne, Dorienne et Hypophrygienne. Alors nous obtenons seulement quelques unes des gammes qui ont entre les demi-tons deux ou trois tons. Aucune des gammes qui ne satisfont à cette condition n'apparaît comme consonante: la gamme mineure harmonique et la gamme mineure mélodique.

Traduit par *R. Košťál.*