MARTIN CELHOFFER, BRNO

$\sqrt{2} \neq a:b$ JAKO PROBLÉM TONALITY

Stanislavovi, kolegovi, příteli a mému prvnímu učiteli, který kdy na tabuli napsal hudební proporci. Psáno s uplatněním textové tropace…

Reflexe tonality v hudbě je zpravidla spojována se systémem modů a s otázkou jisté hierarchie stupňů příslušného modu. Intervaly, stupnice a akordy jsou v evropské hudební teorii definovány na základě rozložení celých tónů a půltónů mezi jednotlivými stupni modu. V současné rovnoměrné temperatuře je toto rozložení víceméně nediskutovatelné. Ovšem v nomenklatuře tónové soustavy ještě nalézáme zbytky složitějšího systému, jenž Goodman charakterizuje jako redundanci notace[1]. Tuto redundanci je nutné přičíst zásadnímu vlivu antické hudební teorie, zejména její metodě uchopení tónové soustavy. A právě fakt, že například tóny *cis* a *des* mají odlišné koreláty (i přes tuto skutečnost je označujeme jako enharmonickou[2] záměnu), nás přivádí zpět k problému nerovnoměrnosti organizace tónového materiálu a ke klíčové otázce po jejím původu.

Příčina, proč se setkáváme s problémem nerovnoměrnosti ladění nebo také nerovnoměrné temperatury, má dvě logicky na sebe navazující roviny: metoda uchopení tónového systému pomocí geometrických proporcí[3] a samotný charakter takto uchopené soustavy.

První rovina tedy souvisí s objevem analogického vztahu mezi geometrickou proporcí vyjádřenou poměrem dvou celých čísel a vztahem dvou tónů. Tento objev je v mnohých pramenech připisován Pythagorovi, ačkoli analogie proporcí a definic vztahů mezi tóny byla známa již mnohem dříve[4]. Nemáme k dispozici žádné autentické informace, které by nám potvrdily zdroje Pythagorova učení a jsme tak odkázáni jednak na spisy následovníků pythagorejské tradice a jednak

1 Goodman, Nelson. *Jazyky umění. Nástin teorie symbolů.* Praha: Academia, 2007.s.146

2 Původní řecká enharmonika je podstatě problému mnohem blíž.

3 Uvádím zde geometrickou proporci vzhledem k uplatněné argumentaci a metodě odvozování.

4 McClain, Ernest G. *The Myth of Invariance.* York Beach: Nicolas-Hays, Inc. 1984.

na Pythagorovy životopisce[5]. Ještě Boethius připisuje objev číselné analogie Pythagorovi, který údajně přišel na tuto myšlenku jda kolem kovárny. Zvuky, vydávané kladivy při úderech do kovadliny, měly rozdílnou výšku v určitém vztahu k velikosti kladiv. A tento analogický vztah se dal vyjádřit pomocí jednoduchých proporcí, v tomto případě oktávy, kvinty, kvarty a dokonce i celého tónu[6]. Tedy velikost kladiv byla ve stejném poměru – proporci, jako vzájemný vztah výšek jednotlivých tónů, *diapason* (oktáva) 2:1, *diapente* (kvinta) 3:2, *diatessaron* (kvarta) 4:3 a *tonus* (celý tón) 9:8. Pythagorejská myšlenka *Tetraktysu* jako svrchovaného numerologického principu kosmu se zde projevuje prostřednictvím čtyř kladiv různé velikosti a čtyř základních intervalů, které tyto kladiva vytvářejí, a v neposlední řadě také definice samotného *Tetraktysu* jako čtyř základních čísel 1, 2, 3 a 4, pomocí kterých jsou tyto intervaly uchopené. V evropské hudební teorii jsou kategorií *perfektních konsonancí*[7]. V řeckém systému organizace tónového materiálu jsou pevnými body v rámci *systēma teleion*[8] odkazující na strukturální důležitost rozdělení tónového materiálu na oktávy a dále každé oktávy na kvarty a odvozeně i kvinty.

Druhá rovina problému příčin nerovnoměrnosti ladění, resp. nerovnoměrnosti rozložení tónové soustavy, má spíš empirický charakter. Spočívá totiž v nezvratném faktu, že číslo 2 (proporce oktávy 2:1) nemá odmocninu vyjádřitelnou žádným racionálním číslem, tj. číslem, které se dá vyjádřit zlomkem s celočíselnými koeficienty, tedy poměrem – proporcí dvou celých čísel[9]. Platí tedy $\sqrt{2} \neq a:b$. Znamená to, že oktávu nelze rozdělit na polovinu, tedy na dva tritony[10], z čehož lze jednoduše odvodit, že ani na šest celých tónů či na dvanáct půltónů. Oktáva se tedy musí dělit jinak než na stejné části, co přináší s sebou řadu problémů

---

5 Nicomachův životopis Pythagora, který se nedochoval, byl pravděpodobně předlohou pro pozdější životopisce Porfyriose a Iamblicha.

6 *„Pythagoram consonantiae musicae partim diapason partim diapente partim diatessaron, quae est consonantia minima, vocarentur, primus Pythagoras hoc modo repperit, qua proportione sibimet haec sonorum concordia iungeretur. Et ut sit clarius quod dictum est, sint verbi gratia malleorum quattuor pondera, quae subter scriptis numeris contineantur: XII. VIIII. VIII. VI. Hi igitur mallei, qui .XII. et .VI. ponderibus vergebant, diapason in duplo concinentiam personabant. Malleus vero .XII. ponderum ad malleum .VIIII. et malleus .VIII. ponderum ad malleum .VI. ponderum secundum epitritam proportionem diatessaron consonantia iungebatur. .VIIII. vero ponderum ad .VI. et .XII. ad .VIII. diapente consonantiam permiscebant. .VIIII. vero ad .VIII. in sesquioctava proportione resonabant tonum."* Boethius, Anicius Manlius Severinus. De institutione musica. Liber I. In Godofredus Friedlein (ed.). *Boetii De institutione musica libri quinque*. Lipsko: B. G. Teubner, 1867. s. 197–198.

7 d*iatessaron* – kvarta, je obecně považována za disonanci

8 *proslambanómenos, hypáte hypáton, hypáte méson, mése, paramése, néte diezeugménon, néte hyperboláion*

9 Podobně jako například Ludolfovo číslo nebo tzv. zlatý řez.

10 Druhá odmocnina z proporce oktávy 2:1 je ve skutečnosti řešením rozdělující oktávu na dva stejné intervaly, tedy tritony, třetí odmocnina proporce oktávy $\sqrt[3]{2}$ by řešila rozdělení oktávy na tři stejné díly, tedy na tři velké tercie – *ditony*.

spojených nejen s laděním nástrojů s pevnou intonací[11], ale především s definicí intervalů v rámci modálního systému. Proto se s pojednáním o hudebních proporcích setkáváme v mnohých pramenech ještě v 18. století.

Nejen že je rozdělení oktávy nerovnoměrné, ale také distribuce jednotlivých nestejných intervalů je nepravidelná. Například v aplikaci *ditonického diatonického* tetrachordu (9:8 – 9:8 – 256:243) na modální systém dostaneme oktávu pozůstávající z pěti celých tónů každý o proporci 9:8 (pythagorejský celý tón) a dvou půltónů o proporci 256:243 (pythagorejský diatonický malý půltón, tzv. *limma*):

$$\frac{2}{1} = \left(\frac{9}{8}\right)^5 \times \left(\frac{256}{243}\right)^2$$

Abychom dostali pouze půltóny, odečteme *limmu* od celého tónu a dostaneme pythagorejský chromatický velký půltón, tzv. *apotomé*:

$$\frac{9}{8} \div \frac{256}{243} = \frac{2187}{2048}$$

Jelikož v modální diatonické oktávě máme pět celých tónů 9:8 a dva diatonické malé půltóny 256:243, celkový počet půltónů v oktávě bude sedm *limm* proti pěti *apotomé*. To má za následek další fatální jev, kterým je existence pythagorejské komy. Když se hlouběji zamyslíme nad příčinou existence této zdánlivě další anomálie, jsme nuceni přiznat, že stejný předpoklad nedělitelnosti oktávy na stejné intervaly má za následek i pythagorejské koma. Pokud totiž platí, že oktávu 2:1 nelze rozdělit na více (jak jeden) vzájemně stejných intervalů (libovolného počtu), tak zároveň i platí, že i násobky proporce oktávy 2:1, tedy 4:1, 8:1, 16:1 apod.[12], také nelze rozdělit na stejné intervaly, pochopitelně s vyloučením proporce oktávy samotné včetně jejích násobků, resp. mocnin. Proto ani není možné definovat libovolný počet oktáv libovolným počtem kvint. Tedy v řadě na sebe se vršících kvint neexistuje proporce oktávy a jejích mocnin. To znamená, že žádná kvinta ani součet vícero kvint nejsou dělitelné dvěma tak, aby výsledek bylo celé číslo (nikoli proporce):

3:2 (jedna kvinta), 9:4 (dvě kvinty), 27:8 (tři kvinty), 81:16 (čtyři kvinty) atd. Vršení proporcí čistých kvint nám připomíná proporční model *duše světa* v Platónově *Timaiovi*[13] až po „krajní číslo v poměru 256:243“[14], jelikož se jedná o řadu mocnin čísla tři v čitatelích a mocnin čísla dvě v jmenovatelích zlomků. Nejbližší aproximace vršících se kvint k proporci oktávy se nalézá až na součtu dvanácti kvint 531441:4096, tedy:

---

11 Zejména klávesové nástroje a nástroje s hmatníkem s převazy, částečně i dechové nástroje.

12 Násobky proporce oktávy jsou totožné s jednou dimenzí řady *pout* světové duše v Platónově dialogu *Timaios*.

13 Platón. *Timaios, Kritias*, překlad František Novotný 1919. Praha: Oikoymenh, 2003. s. 27–31.

14 ibid s.29.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx \left(\frac{2}{1}\right)^{n}$$ v případě, že $n = 7$, tedy proporce sedmi oktáv 128:1.

Po dosazení rozdíl těchto hodnot bude činit již zmíněné tzv. pythagorejské koma:

$$\frac{531441}{4096} \div \frac{128}{1} = \frac{531441}{524288}$$

Stejný výsledek dostaneme i po odečtení oktávy od šesti celých tónů, nebo tří velkých (pythagorejských) tercií:

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{6} \div \frac{2}{1} = \left(\frac{81}{64}\right)^{3} \div \frac{2}{1} = \frac{531441}{524288}$$

Ke komě se dopracujeme i odečtením malého pythagorejského diatonického půltónu – *limmy* od velkého chromatického půltónu – *apotomé*:

$$\frac{2187}{2048} \div \frac{256}{243} = \frac{531441}{524288}$$

Tato definice, resp. způsob odvození pythagorejské komy je pravděpodobně nejpřijatelnější, protože vystihuje podstatu problému. Jelikož distribuce intervalů *apotomé* a *limma* je nerovnoměrné, jedenáct kvint kruhu o proporci 3:2 bude obsahovat čtyři *limmy* a tři *apotomé*:

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{256}{243}\right)^{4} \times \left(\frac{2187}{2048}\right)^{3}$$

a jedna „vlčí" kvinta pět *limm* a dvě *apotomé*:

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{5} \times \left(\frac{2187}{2048}\right)^{2} = \frac{262144}{177147}$$

Jedenáct čistých kvint o proporci 3:2 a jedna „vlčí" kvinta 262144:177147 pak dají v součtu sedm oktáv 2:1, tedy 128:1:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{11} \times \frac{262144}{177147} = \frac{128}{1}$$

Pythagorejské koma se tak stává jakýmsi symbolem tonální nesouměřitelnosti, která rozhodně nemá své kořeny výhradně v matematických spekulacích ve spojitosti s proporčním uchopením tónové soustavy, ale také ve fundamentální fyzikální vlastnosti pravidelně se chvějících těles. Tóny znějící od tónu základního v proporci oktávy 2:1 a kvinty 3:2 jsou totiž první a druhý harmonický tón, jelikož pružné těleso se chvěje i ve svých půlkách a třetinách. V tomto ohledu se všechny harmonické proporce, tj. proporce, u kterých platí $\frac{n+1}{n}$ (*superparticularis*) nebo $\frac{n}{n+1}$ (*subsuperparticularis*) shodují s řadou alikvotních tónů.

Problematika vztahu kvint a oktáv ale není pro pokračovatele pythagorejské tradice v antické hudební teorii tak zásadní, jako pro pozdější hudební teoretiky vrcholného středověku a renesance. Pro antickou hudební teorii byla důležitá tetrachordická typologizace *genera* a vsazení samotných tetrachordů do *systēma teleion*.

Tradovaný příběh o Pythagorově objevu hudebních proporcí, kde základní proporce oktávy 2:1, kvinty 3:2 a kvarty 4:3 byly objeveny pozorováním, mne vede k domněnce, že pythagorejci intervaly nedělili, ale že se k definicím tetrachordů dopracovávali kombinační metodou, respektive argumentačním odvozováním[15] všech intervalů z intervalů základních, definovaných čísly *Tetractysu*. Tedy pokud bychom chtěli odvodit diatonický tetrachord pomocí již známých základních proporcí (2:1, 3:2 a 4:3), budeme postupovat takto:

1. z rozdílu kvinty a kvarty stanovíme celý tón:

$$\frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$$

2. do tetrachordu s krajními body o proporci kvarty 4:3 vložíme dva celé tóny 9:8 a odčítáme je od kvarty, čímž dostaneme půltón:

$$\frac{4}{3} \div \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{256}{243}$$

3. tetrachord tedy sestavíme z dvou celých tónů 9:8 a jednoho půltónu 256:243 tak, že platí součet všech intervalů s krajními body tetrachordu 4:3:

$$\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{256}{243} = \frac{4}{3}$$

S převratným řešením problému nedělitelnosti oktávy na stejné části přišel Aristoxenos z Tarenta. Jako žák a následovník Aristotela odmítl užívat geometrickou analogii jako výchozí metodu uchopení tónové soustavy a navrhl řešení, které v mnohém připomíná fyzikální jednotkový systém, resp. fyzikální systém veličin. Základní mírou uchopení vztahů mezi tóny se stává jeden tón[16]. A na základě definice této veličiny, kde kvalitativní určení je celý tón a kvantitativní určení číslo 1, definuje oktávu jako součet šesti celých tónů, resp. tetrachord jako součet dvou a půl tónu. Aristoxenova definice *diatonického syntonického*[17] tetrachordu tedy je:

1 (tón) – 1 (tón) – 1/2 (půltón), celkem tedy 2 1/2 tónu, což je kvarta.

---

15 Euclid. *Sectio canonis*, In A.Barker (ed.). *Greek Musical Writings II*: *Harmonic and Acoustic Theory*. Cambridge, 1989. s.190–208.

16 V podobném smyslu, jako je v novodobé akustice základní jednotkou jeden cent, přičemž jeden půltón má sto centů.

17 viz také Winnington-Ingram, R.P. Aristoxenus and the Interval sof Greek Music, *The Classical Quarterly*, Vol. 26, No. 3/4, s.195–208.

Ačkoli se zdá Aristoxenův přístup revoluční, chybí jednoznačné určení absolutní kvantity jednoho tónu samotného[18]. Proporční definice tuto nutnost obcházejí relativním vztahem výšek tónů navzájem, čímž prostřednictvím analogie dosahují absolutní platnost[19].

Nedělitelnost oktávy $\sqrt{2} \neq a:b$ nelze považovat pouze za problém spekulativního přístupu k analogickým definicím tónové soustavy, nýbrž (jak již bylo naznačené výše) tento problém vychází také z řady harmonických – alikvotních tónů. Pokud se blíže podíváme na charakteristiku pomyslných uzlů[20] chvějící se struny, zjistíme, že konstituují rozrůstající se rovnostranný trojúhelník, resp. řadu trojúhelníkových čísel[21] $\frac{n(n+1)}{2}$. První čtyři alikvotní tóny odpovídají trojúhelníku znázorňující *Tetraktys*[22]:

o

o o

o o o

o o o o

Řada alikvotních tónů odpovídá tzv. přirozenému ladění[23], ke kterému má blíže spíš Ptolemaios, resp. Didymos (kterého Ptolemaios parafrázuje), nežli pythagorejci. U pythagorejského *ditonického diatonického* tetrachordu (9:8 – 9:8 – 256:243), ze kterého jsme vycházeli v předchozích úvahách, se totiž setkáme s tercií konstituovanou ze dvou shodných celých tónů 9:8:

$$\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$$

Tato tercie je v rozporu se strunou chvějící se ve svých pětinách (tedy mající čtyři pomyslné uzly). Odvodíme následovně: pět dílů struny přeneseme do čitatele, pak odčítáme jeden díl – dostaneme čtyři díly a dosadíme do jmenovatele: $\frac{5}{5-1} = \frac{5}{4}$, nebo odčítáme (geometricky) předchozí trojúhelníkové číslo, tedy jednoduše 5:4 – velká, tzv. přirozená tercie. Podivuhodná, i když částečná shoda (u některých proporcí pythagorejců a také u numerologie Platónova *Timaia*) proporcí řady alikvotních tónů s analogickým uchopením tónové soustavy pomocí geometrických proporcí je o to záhadnější, že alikvotní tóny nebyly řecké hudební teorii známy.

---

18 Takové určení je možné až na základě např. kmitočtu, resp. počtu dvoukmitů za jednu sekundu.

19 Proporce oktávy 2:1 určuje pouze vztah dvou tónů v oktávě a nikoli jejich absolutní výšku.

20 tj. míst, kde se protíná chvění struny v její půlce, třetině, čtvrtině, pětině atd.

21 viz také Ghyka, Matila G. *Zlaté číslo.* Praha: Argo/Dokořán 2008, s.36–37.

22 viz také popis tzv. platónských těles (*Timaios*, s.48–51), jejich vztahu k *Tetraktysu* a k zlatému řezu (Olsen, Scott. *Záhadný zlatý řez.* Vimperk: Dokořán, 2009. s.62–64) a vztahu k algebraickým yantrám (McClain, Ernest G. *The Myth of Invariance.* York Beach: Nicolas-Hays, Inc., 1984. s.43–59).

23 tj. ladění, které staví na tzv. harmonických proporcích, u kterých platí $\frac{n+1}{n}$

K intervalům analogickým k řadě alikvotních tónů, u kterých platí $\frac{n+1}{n}$, se dopracujeme také metodou dělení intervalů podle formulace $\frac{x}{y} = \frac{2x}{x+y} \times \frac{x+y}{2y}$. Z této metody vycházela řada pozdně antických hudebních teoretiků, proporce *superparticularis* je totiž dobře aplikovatelná pro měření na monochordu[24]. Ladění postavené na dělení harmonických intervalů je také známo jako tzv. *syntonické* ladění podle tetrachordu, ze kterého je odvozeno. *Syntonický diatonický* tetrachord (10:9 – 9:8 – 16:15), jak jej známe z Ptolemaiovy *Harmoniky*[25], obsahuje dva rozdílné celé tóny. Tento tetrachord popisuje také Gioseffo Zarlino[26] vedle již zmíněného *ditonického diatonického*[27] tetrachordu (9:8 – 9:8 – 256:243), který byl *„molto favorito da gli antichi Filosofi“*[28]. Naproti tomu *diatonický syntonický* tetrachord[29] popisuje Zarlino následovně:

36. *Hypate meson.*
Sesquinona.
40. *Lychanos hypaton.*
Sesquiottava.
45. *Parhypate hypaton.*
Sesquiquintadecima.
48. *Hypate hypaton.*

Složenou proporci tetrachordu 48:45:40:36 rozdělíme na dvojice a zjednodušíme společným dělitelem:

40:36 = 10:9 (*Sesquinona*, tedy 1 1/9)
45:40 = 9:8 (*Sesquiottava*, 1 1/8)
48:45 = 16:15 (*Sesquiquintadecima*, 1 1/15)

Tento tetrachord tedy v sobě skrývá jak přirozenou velkou tercii 45:36 = 5:4 (*Sesquiquarta*, 1 1/4), tak i přirozenou malou tercii 48:40 = 6:5 (*Sesquiquinta*, 1 1/5). Pokud postavíme na tomto tetrachordu modus[30], zjistíme, že čistá kvinta (tj. kvinta o proporci 3:2) bude na I., III., IV., V. a VI. stupni, velká přirozená tercie (5:4) na I., IV. a V. stupni, malá přirozená tercie (6:5) na III., VI. a VII. stup-

24 Čitatel je vždy o jedno celé číslo větší než jmenovatel, tedy stačí strunu rozdělit čitatelem, pak jeden díl odčítat a slyšitelný výsledek je interval definovaný danou proporcí.

25 Ptolemaios. *Harmonika.* IN: *Greek Musical Writings II*: *Harmonic and Acoustic Theory*, A. Barker, ed., Cambridge: 1989. s.270–391.

26 Zarlino, Gioseffo. *Le Institutioni Harmoniche. Seconda Parte.* 2.vyd. Benátky, 1562. s.83.

27 *Tetrachordo Diatonico Diatono*, ibid.

28 ibid.

29 *Il Sintono, overo Incitato, che lo vogliamo dire*, ibid.

30 viz také Dykast, Roman. *Hudba věku melancholie*. Praha: Togga, 2005. s.79–83.

ni. Vidíme, že je tak dosaženo harmonické dělení čistých kvint podle formulace $a : \frac{a+b}{2} : b$ v rámci modu na I., IV. a V. stupni[31]:

$$3 : \frac{2 \times 3 \times 2}{3+2} : 2 = 3 : \frac{12}{5} : 2 = 15 : 12 : 10$$

Dostali jsem složenou proporci 15:12:10 (durový kvintakord). Na III. a VI. stupni je dosaženo aritmetického dělení čistých kvint podle formulace $a : \frac{a+b}{2} : b$:

$$3 : \frac{3+2}{2} : 2 = 3 : \frac{5}{2} : 2 = 6 : 5 : 4$$

Výsledná složená proporce 6:5:4 reprezentuje dnešní mollový kvintakord. Toto rozvržení čistých kvint a jejich dělení předem udává hierarchizaci jednotlivých stupňů, jejich „tonální způsobilost“. S podobnou tonální determinací, již explicitně ve smyslu akordů (nikoli ve smyslu rozdělených kvint u Zarlina), se setkáme i u Rameaua[32]. Při definici proporce durového a mollového kvintakordu používá zjednodušenou metodu určování středu:

velká tercie	4:5
malá tercie	5:6
násobky čitatelů a jmenovatelů, 4x5 a 5x6, dostaneme kvintu:	20:30
násobky „do kříže“, dostaneme středy	24 a 25
dosazení středů do poměru kvinty:	20:24:30 20:25:30

Výsledné proporce: 20:24:30 – mollový kvintakord a 20:25:30 – durový kvintakord Rameau pak nazývá *perfektními* akordy. Podobně definuje také septakordy a určuje i proporce akordických obratů. *Perfektní* kvintakordy 20:25:30 (durové) se nacházejí v modu odvozeného ze *syntonického* tetrachordu na I., IV. a V. stupni a *perfektní* kvintakordy 20:24:30 mollové) na III. a VI. stupni. Vidíme tedy, že nerovnoměrnost organizace tónové soustavy, jako přirozený následek nedělitelnosti oktávy, se projevuje jako svrchovaná determinanta tonality a harmonie v různých rovinách. „Perfekce“ a čistota ladění tak vytváří přirozenou hierarchii stupňů modu.

31 srovnej Zarlino, Gioseffo. *Le Institutioni Harmoniche. Prima Parte.* 2.vyd. Benátky, 1562. s.44–49.

32 Rameau, Jean Philippe. *Traité de l'Harmonie.* Přeložil Philip Gossett. New York, 1971. s.35.